



Факультет мировой экономики и международной торговли

Кафедра математики и информатики

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Тематика домашних и контрольной работ

Домашние задания предназначены для контроля освоения студентами следующих основных компонентов курса:

1. Основные понятия и определения.
 - 1.1. Преобразования матриц и системы линейных уравнений.
 - 1.1.1. Матрицы. Матрица и расширенная матрица системы линейных уравнений.
 - 1.1.2. Элементарные преобразования матриц.
 - 1.1.3. Общее решение систем линейных уравнений. Главные и свободные неизвестные.
 - 1.2. Определители и их вычисление.
 - 1.3. Линейное (векторное) пространство.
 - 1.3.1. Подпространство линейного пространства.
 - 1.3.2. Линейная оболочка системы векторов.
 - 1.3.3. Линейно зависимые и независимые системы векторов.
 - 1.3.4. Базис и координаты векторов.
 - 1.3.5. Размерность линейного пространства.
 - 1.4. Арифметические операции над матрицами.
 - 1.4.1. Сумма матриц.
 - 1.4.2. Умножение матрицы на число.
 - 1.4.3. Произведение матриц.
 - 1.4.4. Обратная матрица и обращение матриц.
 - 1.5. Матрица перехода.
 - 1.6. Ранг матрицы и его отыскание.
 - 1.7. Фундаментальная система решений.
2. Методы решения некоторых классов задач линейной алгебры.
 - 2.1. Приведение матриц к ступенчатому виду. Алгоритм Гаусса.
 - 2.2. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
 - 2.3. Определитель и его основные свойства.
 - 2.4. Вычисление определителя разложением по строке (столбцу).
 - 2.5. Обращение матриц.
 - 2.6. Вычисление координат векторов.

- 2.7. Построение базиса линейного пространства.
- 2.8. Преобразование координат при замене базиса.
- 2.9. Ранг матрицы и его отыскание с помощью алгоритма Гаусса.
- 2.10. Критерий линейной независимости системы строк (столбцов).
- 2.11. Построение фундаментальной системы решений системы линейных однородных уравнений.
- 2.12. Построение множества решений системы линейных уравнений.
- 2.13. Выбор главных и свободных неизвестных.

Контрольная работа предназначена для проверки качества освоения студентами следующих компонентов дисциплины:

1. Основные понятия и определения.
 - 1.1. Преобразования матриц и системы линейных уравнений.
 - 1.1.1. Матрицы. Матрица и расширенная матрица системы линейных уравнений.
 - 1.1.2. Элементарные преобразования матриц.
 - 1.1.3. Общее решение систем линейных уравнений. Главные и свободные неизвестные.
 - 1.2. Определители и их вычисление.
 - 1.3. Линейное (векторное) пространство.
 - 1.3.1. Подпространство линейного пространства.
 - 1.3.2. Линейная оболочка системы векторов.
 - 1.3.3. Линейно зависимые и независимые системы векторов.
 - 1.3.4. Базис и координаты векторов.
 - 1.3.5. Размерность линейного пространства.
 - 1.4. Арифметические операции над матрицами.
 - 1.4.1. Сумма матриц.
 - 1.4.2. Умножение матрицы на число.
 - 1.4.3. Произведение матриц.
 - 1.4.4. Обратная матрица и обращение матриц.
 - 1.5. Матрица перехода.
 - 1.6. Ранг матрицы и его отыскание.
 - 1.7. Фундаментальная система решений.
2. Методы решения некоторых классов задач линейной алгебры.
 - 2.1. Приведение матриц к ступенчатому виду. Алгоритм Гаусса.
 - 2.2. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
 - 2.3. Определитель и его основные свойства.
 - 2.4. Вычисление определителя разложением по строке (столбцу).
 - 2.5. Обращение матриц.
 - 2.6. Вычисление координат векторов.
 - 2.7. Построение базиса линейного пространства.
 - 2.8. Вычисление размерности пространства.
 - 2.9. Преобразование координат при замене базиса.
 - 2.10. Ранг матрицы и его отыскание с помощью алгоритма Гаусса.
 - 2.11. Критерий линейной независимости системы строк (столбцов).
 - 2.12. Исследование совместности системы линейных уравнений.
 - 2.13. Построение фундаментальной системы решений системы линейных однородных уравнений.
 - 2.14. Построение множества решений системы линейных уравнений.
 - 2.15. Выбор главных и свободных неизвестных.

Типовой вариант домашнего задания

1. Найдите решение (методом обратной матрицы, по формулам Крамера и методом Гаусса) системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$$

2. Представьте как выражение главных неизвестных через свободные общее решение системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 35, \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 33. \end{cases}$$

3. Вычислите определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & -2 \\ 6 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & -2 & -5 \end{vmatrix}.$$

4. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите следующие

произведения матриц: $AB, AB^T, A^T B, A^T B^T, BA, B^T A, BA^T, B^T A^T$ в тех случаях, когда операция умножения определена.

5. Найдите координаты вектора \bar{x} относительно базиса \bar{e}_1^*, \bar{e}_2^* , если известны его координаты $(50; 48)$ относительно базиса \bar{e}_1, \bar{e}_2 , причем $\bar{e}_1^* = 7\bar{e}_1 + 8\bar{e}_2$; $\bar{e}_2^* = 9\bar{e}_1 + 8\bar{e}_2$.

6. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Установите, можно ли образовать базис четырехмерного пространства из векторов: $\bar{a}_1 = (3, -12, -1, 2)$; $\bar{a}_2 = (-1, 7, 1, 1)$; $\bar{a}_3 = (1, 2, 1, 4)$; $\bar{a}_4 = (1, 1, 4, 1)$.
8. Векторы $\bar{e}_1(-4, -1, 1)$; $\bar{e}_2(-2, 1, 1)$; $\bar{e}_3(3, -2, -2)$; $\bar{e}_1^*(14, 6, -2)$; $\bar{e}_2^*(0, 8, 4)$; $\bar{e}_3^*(-3, -2, 0)$ заданы координатами относительно некоторого базиса. Докажите, что системы векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ и $\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*, \bar{e}_3^*$ являются базисами («старым» и «новым»). Найдите матрицу перехода от «старого» базиса к «новому».

Типовой вариант контрольной работы

1. Найдите координаты вектора \bar{x} относительно базиса $\bar{e}_i^*, i = \overline{1, 3}$, если известны его координаты $(-7, -3, -5)$ относительно базиса $\bar{e}_i, i = \overline{1, 3}$, а вектора базисов связаны соотношениями $\bar{e}_1^* = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$; $\bar{e}_2^* = 6\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 - 4\bar{e}_3$; $\bar{e}_3^* = 3\bar{e}_1 - \bar{e}_2 - \bar{e}_3$.

2. Представьте как выражения главных неизвестных через свободные решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases}$$

3. Вычислите определитель
- $$\begin{vmatrix} 2 & -4 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -4 & 7 \\ 6 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix}.$$

4. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Найдите, при каких значениях x вектор $\bar{a}_3(x, 1, 1)$ образует базис вместе с векторами $\bar{a}_1(1, 2, 3)$; $\bar{a}_2(4, 5, 6)$.
7. Установите, является ли совместной система уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Типовой вариант заданий экзаменационного билета

1. Формулы Крамера решения систем линейных уравнений с невырожденной матрицей системы.
2. Нарисуйте параллелепипед и укажите те его диагонали, которые соответствуют векторам $\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$ и $\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$, если векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ соответствуют ребрам этого параллелепипеда.
3. Отрезок с концами в точках $A(3, 5)$ и $B(-12, -4)$ разделен на три равные части. Найдите координаты точек деления.

4. Найдите ранги матриц AB и BA , если $A = (2 \ 1 \ -2)$; $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. Методом обратной матрицы решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 3, \\ 4x_1 + 5x_2 = 7. \end{cases}$$

6. Установите, компланарны ли векторы $\bar{a}(4, 3, 2)$, $\bar{b}(1, 2, 3)$, $\bar{c}(1, 0, -1)$.
7. Найдите какой-нибудь базис в трехмерном пространстве векторов, перпендикулярных вектору $(1, 2, 3)$.
8. Могут ли матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ быть матрицами одного линейного оператора в различных базисах?

9. В некотором базисе заданы векторы $\vec{a}(2, 0, 2)$; $\vec{b}(0, 2, 2)$. Найдите угол (в градусах) между этими векторами.
10. Вычислите площадь параллелограмма, сторонами которого являются векторы:
 $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{k}$; $\vec{b} = -4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

**Перечень основной и дополнительной учебной литературы,
необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

Основная литература

1. Налимов В.Н. Основы линейной алгебры (для экономистов и менеджеров). Учебное пособие. – М.: ООО Компания ДЕВВЕД, 2013.
2. Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Учебник. – М.: Проспект, 2012.
3. Магазинников Л.И., Магазинникова А.Л. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Учебное пособие. [Электронный ресурс] / Т.: Эль Контент, 2012. – 180 с <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=208684&sr=1>

Дополнительная литература

1. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Шандра И.Г. Математика в экономике (часть 1). Учебник. – М.: Финансы и статистика.
2. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Шандра И.Г. Математика в экономике (часть 2). Учебник. – М.: Финансы и статистика.
3. Буров А.Н., Соснина Э.Г. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Учебное пособие. [Электронный ресурс] / Н.: НГТУ, 2012. – 186 с. <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=228751&sr=1>