



Факультет мировой экономики и международной торговли

Кафедра математики и информатики

## МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Вопросы для оценки качества освоения дисциплины (модуля)

### Теоретические вопросы

#### Тема 1

1. Что такое инструментальные (управляющие) переменные и параметры математической модели? В чем состоит их принципиальное отличие?
2. Что такое допустимое множество (область допустимых решений)?
3. Что такое критерий оптимизации и целевая функция?
4. Что такое линии уровня целевой функции?
5. Дайте общую формулировку детерминированной статической задачи оптимизации.
6. Назовите основные причины неопределенности в параметрах математической модели и объясните ее влияние на решение.
7. Приведите примеры использования математических моделей для описания поведения экономических агентов.
8. Что такое рациональное поведение с точки зрения теории оптимизации?
9. Как методы оптимизации используются при принятии экономических решений?
10. Расскажите об использовании оптимизации в задачах идентификации параметров математических моделей.
11. Что такое глобальный максимум критерия и оптимальное решение?
12. В чем состоит достаточное условие существования глобального максимума (теорема Вейерштрасса).
13. Назовите причины отсутствия оптимального решения.
14. Что такое локальный максимум?

#### Тема 2.

15. Сформулируйте общую задачу нелинейного программирования.
16. Сформулируйте необходимое условие локального максимума в общей задаче нелинейного программирования.
17. Что такое функция Лагранжа?
18. Дайте определение седловой точки функции Лагранжа.

19. Сформулируйте и докажите достаточное условие оптимальности с помощью функции Лагранжа.
20. Сформулируйте условие дополняющей нежесткости и дайте его экономическую интерпретацию.
21. Дайте определение выпуклого множества.
22. Какими свойствами обладают выпуклые множества?
23. Дайте определение опорной гиперплоскости.
24. Дайте определение разделяющей гиперплоскости.
25. Сформулируйте и проиллюстрируйте теорему об отделимости выпуклых множеств.
26. Сформулируйте понятия выпуклой и вогнутой функций.
27. Что такое строгая выпуклость функции?
28. Что такое надграфик функции? Какими свойствами обладает надграфик выпуклой функции?
29. Сформулируйте достаточное условие выпуклости функции.
30. Какими свойствами обладают выпуклые функции?
31. Сформулируйте выпуклую задачу нелинейного программирования.
32. Сформулируйте теорему о глобальном максимуме в выпуклом случае.
33. Приведите содержательный пример выпуклой задачи нелинейного программирования.
34. Сформулируйте теорему Куна-Таккера.
35. Дайте экономическую интерпретацию множителей Лагранжа.
36. Как решения выпуклой задачи оптимизации зависят от параметров?

### Тема 3.

37. Сформулируйте задачу линейного программирования.
38. Приведите содержательные примеры задачи линейного программирования.
39. Что такое каноническая и стандартная (нормальная) формы записи задачи линейного программирования?
40. Какими свойствами обладает допустимое множество (область допустимых решений) задачи линейного программирования?
41. Какими свойствами обладает оптимальное решение в задаче линейного программирования?
42. Как выглядят функция Лагранжа и условия Куна-Таккера в задаче линейного программирования?
43. Сформулируйте двойственную задачу линейного программирования.
44. Сформулируйте теоремы двойственности в задаче линейного программирования.
45. Дайте интерпретацию двойственных переменных в задаче линейного программирования.
46. Расскажите об анализе чувствительности в задаче линейного программирования.
47. Перечислите все операции графического метода решения задачи линейного программирования.
48. В чем состоят методы решения задач линейного программирования (симплекс-метод и др.)?

### Тема 4.

49. Какие возможности предоставляет среда MS Excel для решения задач линейного программирования?
50. Какие вы знаете программные продукты, предназначенные для решения задач линейного программирования?
51. В чем состоят градиентные методы решения задач безусловной оптимизации?
52. Как штрафные функции используются при отыскании решения выпуклой задачи линейного программирования?

53. Расскажите о методах решения задач линейного программирования, основанных на применении штрафных функций.
54. Сформулируйте в общей постановке задачу целочисленного программирования. Приведите содержательные примеры задачи целочисленного программирования.
55. Какие методы решения задач целочисленного программирования вам известны?

#### **Тема 5.**

56. Сформулируйте задачу выбора решений в условиях неопределенности.
57. Назовите и сформулируйте основные критерии выбора решений в условиях неопределенности (принцип гарантированного результата, критерий Уальда, критерий Байеса-Лапласа, критерий Сэвиджа, критерий Гурвица).
58. Как определяется множество допустимых гарантирующих программ?
59. Что такое наилучшая гарантирующая программа?
60. Как используется вероятностная информация о параметрах в задачах принятия решений при случайных параметрах?
61. В чем состоит принятие решений на основе математического ожидания?
62. Как учитывается склонность к риску?

#### **Тема 6.**

63. Сформулируйте постановку задачи многокритериальной оптимизации.
64. Что такое множество достижимых критериальных векторов?
65. Дайте определение доминирования и оптимальности по Парето.
66. Что такое эффективные решения и паретова граница?
67. Назовите основные подходы к построению методов поиска решений в задачах многокритериальной оптимизации.

#### **Тема 7.**

68. Приведите примеры многошаговых систем в экономике.
69. В чем состоят особенности динамических задач оптимизации?
70. Приведите содержательные примеры динамической задачи оптимизации.
71. Что такое многошаговые динамические модели?
72. Что такое непрерывные динамические модели?
73. Что такое управление и состояние в динамических моделях?
74. Приведите примеры задания критерия в динамических задачах оптимизации.
75. В чем состоит метод динамического программирования в многошаговых задачах оптимизации?
76. Сформулируйте принцип оптимальности и запишите уравнение Беллмана.
77. Как задача оптимизации многошаговой системы сводится к задаче математического программирования?

#### **Типовые примеры заданий.**

1. Найдите и изобразите в декартовой системе координат области выпуклости и вогнутости функции  $f(x, y) = (x-1)^3 - 6xy + y^3$ . Выпуклы ли построенные области?
2. Приведите к стандартному виду задачу нелинейного программирования, заданную моделью:

$$f(x_1, x_2) = -(x_1 - 4)^2 - x_2^2 \Rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \geq -2, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

- Изобразите область допустимых решений и линии уровня целевой функции; решите задачу графическим методом. Проверьте, выполняются ли условия теоремы Вейерштрасса о существовании решения. Пользуясь рисунком, проверьте выполнение условий Куна-Таккера в угловых точках допустимого множества и в точках касания линии уровня целевой функции с границами допустимого множества. Найдите точки, в которых условия Куна-Таккера выполняются, и определите, какие из ограничений являются активными в таких точках. Выпишите условия Куна-Таккера в найденных точках и рассчитайте значения двойственных переменных. Сделайте обоснованный вывод о наличии или отсутствии локального (глобального) максимума во всех рассмотренных точках.
3. Фабрика по производству мороженого может выпускать пять сортов мороженого. При производстве мороженого используются два вида сырья: молоко и наполнители, запасы которых известны. Известны также удельные затраты сырья и цены на единицу продукции каждого сорта. Постройте план производства, обеспечивающий максимум дохода от продаж готовой продукции.
  4. Подготовлено несколько вариантов  $U = \{u^i, i \in I\}$  стратегий  $u^i$  управления фирмой. По каждой стратегии оценен объем  $\pi_{ij}$  прибыли для различных прогнозов  $\xi^j, j = \overline{1, 3}$  будущей ситуации, причем не известно, какой из этих прогнозов реализуется. Вероятности реализации прогнозов также неизвестны. Величины прибыли при реализации каждого из прогнозов приведены в таблице. Найдите наилучшие стратегии по критериям максимакса, Байеса-Лапласа, Сэвиджа, Гурвица, а также наилучшую гарантирующую стратегию и максимальную гарантированную оценку прибыли.
  5. Рассмотрите задачу целевого программирования, в которой множество допустимых решений задается неравенствами  $x_1 + 2x_2 \leq 4, 4x_1 + x_2 \leq 4, x_{1,2} \geq 0$ , критерии заданы соотношениями  $z_1 = 2x_1 + x_2, z_2 = 2x_2$ , а целевая точка совпадает с идеальной точкой  $z^*$ , отклонение от которой задается функцией  $\rho(z, z^*) = \max\{(z_1^* - z_1), (z_2^* - z_2)\}$ . Найдите и изобразите множество достижимых критериальных векторов  $Z$ , его паретову границу  $P(Z)$  и идеальную точку  $z^*$ . Изобразите линии уровня функции  $\rho(z, z^*)$ . Решите графически задачу нахождения достижимой точки  $(z'_1, z'_2)$ , дающей минимум отклонения от идеальной точки; запишите аналитически задачу минимизации отклонения от идеальной точки в виде задачи линейного программирования.
  6. Рассмотрите задачу двухкритериальной максимизации:
 
$$z_1 = F_1(x) = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \Rightarrow \max; z_2 = F_2(x) = -5x_1 + x_2 - 4x_3 \Rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 1)^2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$
 Найдите Парето-эффективное решение, максимизирующее линейную свертку критериев:

$$\phi(z_1, z_2) = 0,6z_1 + 0,4z_2.$$

Проверьте, выполняется ли для возникающей задачи нелинейного программирования условия теоремы Вейерштрасса и является ли эта задача задачей выпуклого программирования. Проверьте возможность использования условий Куна-Таккера в данной задаче. Выпишите и проверьте выполнение условий Куна-Таккера в градиентной форме для различных наборов активных ограничений. Найдите решение рассматриваемой задачи нелинейного программирования. Выпишите функцию Лагранжа и условия Куна-Таккера через функцию Лагранжа; проверьте выполнение условий Куна-Таккера в найденном решении.

7. Фирма принимает решение о стратегии замены оборудования. Считается, что замена может осуществляться в начале любого года (практически моментально), причем частичная замена оборудования невозможна. Стоимость приобретения нового оборудования и замены старого оборудования на новое составляет 6 млн. рублей. После замены старое оборудование, эксплуатировавшееся до этого  $t$  лет,  $t \in [0, 10]$ , реализуется по цене, которая определяется формулой  $R(t) = 0,2(10 - t)$  млн. рублей. Известно, что прибыль от реализации продукции, произведенной за год, определяется формулой  $F(t) = 5 - t$  млн. рублей. Планирование производится на 7 лет. Определите оптимальную стратегию замены оборудования при условии, что в начальный момент времени имеется оборудование, прослужившее 1 год.

8. Динамика фирмы описывается моделью:

$$K_{t+1} = K_t + (1 - u_t) \cdot \delta \cdot K_t, \quad K_0 = 1, \quad C_{t+1} = C_t + u_t \cdot \delta \cdot K_t, \quad C_0 = 0,$$

где  $t = \overline{0, 1, \dots, (T-1)}$  – номер года;  $K_t$  – стоимость основных фондов к началу периода  $[t, t+1]$ ;  $C_t$  – суммарные дивиденды с момента 0 до начала периода  $[t, t+1]$ ;  $u_t$  – доля дивидендов в период  $[t, t+1]$  в прибыли фирмы, которая считается равной  $\delta \cdot K_t$ , причем  $\delta$  – заданный постоянный параметр.

Величина  $u_t$  является управлением в модели, причем  $0 \leq u_t \leq 1, t = \overline{0, 1, \dots, (T-1)}$ .

Пользуясь методом динамического программирования, постройте оптимальное управление, максимизирующее суммарные дивиденды за весь период времени  $[0, T]$ , т.е. величину  $C_T$ . Считать, что  $\delta = 0,6; T = 4$ .

## Перечень основной и дополнительной учебной литературы,

### Основная литература

1. Налимов В.Н. Методы оптимальных решений: Учебное пособие для академического бакалавриата. – М.: Изд. ИМЭС, 2015.
2. Солодников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г. Математика в экономике (Часть 1): Учебник. – М.: ИНФРА-М, 2011.
3. Семенихина О.Н. Мастяева И.Н. Методы оптимизации. Линейные и нелинейные методы в экономике. Учебное пособие. [Электронный ресурс]. – М.: Евразийский открытый институт, 2011. – 422 с.  
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=90388&sr=1>

### Дополнительная литература

1. Бродецкий Г.Л., Гусев Д.А. Экономико-математические методы и модели в логистике: процедуры оптимизации, Учебник. - М.: Издательский центр "Академия", 2012

2. Крутиков В.Н. Методы оптимизации. Учебное пособие. [Электронный ресурс ] / К.: Кемеровский государственный институт, 2011. – 92 с.  
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=232682&sr=1>