АВТОНОМНАЯ НЕКОММЕРЧЕСКАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

ИНСТИТУТ МЕЖДУНАРОДНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ

INSTITUTE OF INTERNATIONAL ECONOMIC RELATIONS

Факультет мировой экономики и международной торговли

Кафедра математики и информатики

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Тематика домашних и контрольной работ

Домашние задания предназначены для контроля освоения студентами следующих основных компонентов курса:

1. Основные понятия и определения.
    - 1.1. Преобразования матриц и системы линейных уравнений.
        - 1.1.1. Матрицы. Матрица и расширенная матрица системы линейных уравнений.
        - 1.1.2. Элементарные преобразования матриц.
        - 1.1.3. Общее решение систем линейных уравнений. Главные и свободные неизвестные.
    - 1.2. Определители и их вычисление.
    - 1.3. Линейное (векторное) пространство.
        - 1.3.1. Подпространство линейного пространства.
        - 1.3.2. Линейная оболочка системы векторов.
        - 1.3.3. Линейно зависимые и независимые системы векторов.
        - 1.3.4. Базис и координаты векторов.
        - 1.3.5. Размерность линейного пространства.
    - 1.4. Арифметические операции над матрицами.
        - 1.4.1. Сумма матриц.
        - 1.4.2. Умножение матрицы на число.
        - 1.4.3. Произведение матриц.
        - 1.4.4. Обратная матрица и обращение матриц.
    - 1.5. Матрица перехода.
    - 1.6. Ранг матрицы и его отыскание.
    - 1.7. Фундаментальная система решений.

2. Методы решения некоторых классов задач линейной алгебры.
    - 2.1. Приведение матриц к ступенчатому виду. Алгоритм Гаусса.
    - 2.2. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
    - 2.3. Определитель и его основные свойства.

2.4. Вычисление определителя разложением по строке (столбцу).
2.5. Обращение матриц.
2.6. Вычисление координат векторов.
2.7. Построение базиса линейного пространства.
2.8. Преобразование координат при замене базиса.
2.9. Ранг матрицы и его отыскание с помощью алгоритма Гаусса.
2.10. Критерий линейной независимости системы строк (столбцов).
2.11. Построение фундаментальной системы решений системы линейных однородных уравнений.
2.12. Построение множества решений системы линейных уравнений.
2.13. Выбор главных и свободных неизвестных.

Контрольная работа предназначена для проверки качества освоения студентами следующих компонентов дисциплины:

1. Основные понятия и определения.
   1.1. Преобразования матриц и системы линейных уравнений.
      1.1.1. Матрицы. Матрица и расширенная матрица системы линейных уравнений.
      1.1.2. Элементарные преобразования матриц.
      1.1.3. Общее решение систем линейных уравнений. Главные и свободные неизвестные.
   1.2. Определители и их вычисление.
   1.3. Линейное (векторное) пространство.
      1.3.1. Подпространство линейного пространства.
      1.3.2. Линейная оболочка системы векторов.
      1.3.3. Линейно зависимые и независимые системы векторов.
      1.3.4. Базис и координаты векторов.
      1.3.5. Размерность линейного пространства.
   1.4. Арифметические операции над матрицами.
      1.4.1. Сумма матриц.
      1.4.2. Умножение матрицы на число.
      1.4.3. Произведение матриц.
      1.4.4. Обратная матрица и обращение матриц.
   1.5. Матрица перехода.
   1.6. Ранг матрицы и его отыскание.
   1.7. Фундаментальная система решений.
2. Методы решения некоторых классов задач линейной алгебры.
   2.1. Приведение матриц к ступенчатому виду. Алгоритм Гаусса.
   2.2. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
   2.3. Определитель и его основные свойства.
   2.4. Вычисление определителя разложением по строке (столбцу).
   2.5. Обращение матриц.
   2.6. Вычисление координат векторов.
   2.7. Построение базиса линейного пространства.
   2.8. Вычисление размерности пространства.
   2.9. Преобразование координат при замене базиса.
   2.10. Ранг матрицы и его отыскание с помощью алгоритма Гаусса.
   2.11. Критерий линейной независимости системы строк (столбцов).
   2.12. Исследование совместности системы линейных уравнений.
   2.13. Построение фундаментальной системы решений системы линейных однородных уравнений.
   2.14. Построение множества решений системы линейных уравнений.

2.15. Выбор главных и свободных неизвестных.

Типовой вариант домашнего задания

1. Найдите решение (методом обратной матрицы, по формулам Крамера и методом Гаусса) системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$$

2. Представьте как выражение главных неизвестных через свободные общее решение системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 35, \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 33. \end{cases}$$

3. Вычислите определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & -2 \\ 6 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & -2 & -5 \end{vmatrix}$.

4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите следующие произведения матриц: $AB,\ AB^T,\ A^T B,\ A^T B^T,\ BA,\ B^T A,\ BA^T,\ B^T A^T$ в тех случаях, когда операция умножения определена.

5. Найдите координаты вектора $\overline{x}$ относительно базиса $\overline{e}_1^*, \overline{e}_2^*$, если известны его координаты (50; 48) относительно базиса $\overline{e}_1, \overline{e}_2$, причем $\overline{e}_1^* = 7\overline{e}_1 + 8\overline{e}_2;\ \overline{e}_2^* = 9\overline{e}_1 + 8\overline{e}_2$.

6. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Установите, можно ли образовать базис четырехмерного пространства из векторов: $\overline{a}_1 = (3, -12, -1, 2);\ \overline{a}_2 = (-1, 7, 1, 1);\ \overline{a}_3 = (1, 2, 1, 4);\ \overline{a}_4 = (1, 1, 4, 1)$.

8. Векторы $\overline{e}_1(-4, -1, 1);\ \overline{e}_2(-2, 1, 1);\ \overline{e}_3(3, -2, -2)$; $\overline{e}_1^*(14, 6, -2);\ \overline{e}_2^*(0, 8, 4);\ \overline{e}_3^*(-3, -2, 0)$ заданы координатами относительно некоторого базиса. Докажите, что системы векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ и $\overline{e}_1^*, \overline{e}_2^*, \overline{e}_3^*$ являются базисами («старым» и «новым»). Найдите матрицу перехода от «старого» базиса к «новому».

Типовой вариант контрольной работы

1. Найдите координаты вектора $\overline{x}$ относительно базиса $\overline{e}_i^*,\ i = \overline{1, 3}$, если известны его координаты $(-7, -3, -5)$ относительно базиса $\overline{e}_i,\ i = \overline{1, 3}$, а вектора базисов связаны соотношениями $\overline{e}_1^* = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + 2\overline{e}_3;\ \overline{e}_2^* = 6\overline{e}_1 - 2\overline{e}_2 - 4\overline{e}_3;\ \overline{e}_3^* = 3\overline{e}_1 - \overline{e}_2 - \overline{e}_3$.

2. Представьте как выражения главных неизвестных через свободные решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases}$$

3. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 2 & -4 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -4 & 7 \\ 6 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$.
4. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.
5. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
6. Найдите, при каких значениях x вектор $\overline{a}_3(x, 1, 1)$ образует базис вместе с векторами $\overline{a}_1(1, 2, 3)$; $\overline{a}_2(4, 5, 6)$.
7. Установите, является ли совместной система уравнений:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Типовой вариант заданий экзаменационного билета

1. Формулы Крамера решения систем линейных уравнений с невырожденной матрицей системы.

2. Нарисуйте параллелепипед и укажите те его диагонали, которые соответствуют векторам $\overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$ и $\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$, если векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ соответствуют ребрам этого параллелепипеда.
3. Отрезок с концами в точках $A(3,\ 5)$ и $B(-12,\ -4)$ разделен на три равные части. Найдите координаты точек деления.
4. Найдите ранги матриц AB и BA, если $A = (2\,1 - 2)$; $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
5. Методом обратной матрицы решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 3, \\ 4x_1 + 5x_2 = 7. \end{cases}$$
6. Установите, компланарны ли векторы $\overline{a}(4, 3, 2)$, $\overline{b}(1, 2, 3)$, $\overline{c}(1, 0, -1)$.
7. Найдите какой-нибудь базис в трехмерном пространстве векторов, перпендикулярных вектору (1, 2, 3).
8. Могут ли матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ быть матрицами одного линейного оператора в различных базисах?
9. В некотором базисе заданы векторы $\overline{a}(2, 0, 2)$; $\overline{b}(0, 2, 2)$. Найдите угол (в градусах) между этими векторами.

10. Вычислите площадь параллелограмма, сторонами которого являются векторы: $\bar{a} = -2\bar{i} + \bar{k}$; $\bar{b} = -4\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Основная литература

1. Налимов В.Н. Основы линейной алгебры (для экономистов и менеджеров). Учебное пособие. – М.: ООО Компания ДЕВВЕД, 2013.
2. Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Учебник. – М.: Проспект, 2012.
3. Магазинников Л.И., Магазинникова А.Л. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Учебное пособие. [Электронный ресурс] / Т.: Эль Контент, 2012. – 180 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=208684&sr=1

Дополнительная литература

1. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Шандра И.Г. Математика в экономике (часть 1). Учебник. – М.: Финансы и статистика.
2. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Шандра И.Г. Математика в экономике (часть 2). Учебник. – М.: Финансы и статистика.
3. Буров А.Н., Соснина Э.Г. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Учебное пособие. [Электронный ресурс] / Н.: НГТУ, 2012. – 186 с. http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=228751&sr=1